บทที่ 1
เวกเตอร์

เป็นเวลากว่า 20 ปีที่ทีมนักสำรวจพยายามจะปีนเข้าไปสำรวจแนวซอกหินของถ้ำแมมมอธอันสุดแสนจะคับแคบและมีการเชื่อมต่อกันเป็นโครงข่ายสลับซับซ้อน นายริชาร์ด ซอฟท์คือหนึ่งในกลุ่มนักสำรวจของถ้ำแห่งนี้ ในภาพเขากำลังพยายามคลานอยู่ภายในถ้ำเพื่อนำสัมภาระให้ผ่านพ้นช่องเขา หลังจากที่เวลาผ่านไป 12 ชั่วโมงในเส้นทางเขาวงกต และทางน้ำใต้ดินที่เย็นเจี๊ยบ คณะนักปีนเขาของซอฟท์ ก็สามารถผ่านซอกเขาซึ่งเป็นซอกเขาเล็กๆ ซอกหนึ่งในหลายๆซอกของถ้ำแมมมอธออกไปได้ คลิกครับ

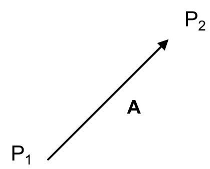
1-1 เวกเตอร์และสเกลาร์

ปริมาณสเกลาร์ คือปริมาณทางกายภาพที่ประกอบด้วยตัวเลขและหน่วย ก็สามารถเข้าใจได้ทันที

ปริมาณเวกเตอร์ เป็นปริมาณที่ต้องบอกทั้งขนาด(ตัวเลขและหน่วยวัด)และทิศทางจึงจะเข้าใจได้ดี

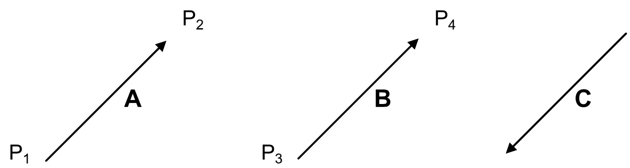
ปริมาณเวกเตอร์แรกสุดที่จะเขียนถึง คือ **ระยะกระจัด**

สมมติให้อนุภาคหนึ่งมีขนาดเล็กมากเกือบเป็นจุดเคลื่อนที่จากจุด P_1 ไปยังจุด P_2 แทนด้วยการลากเส้นตรงจากจุด P_1 ไปสิ้นสุดที่หัวลูกศรตรงจุด P_2 เรียกว่า เวกเตอร์ **A**



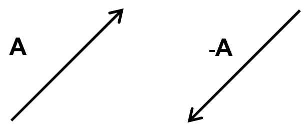
รูป 1-1 เวกเตอร์ **A** แทนระยะกระจัดจากจุด P_1 ไปยังจุด P_2

ระยะกระจัดเป็นปริมาณเวกเตอร์เพราะมีทั้งขนาดและทิศทาง ปกติจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่หนาแทนเวกเตอร์ เพื่อจะให้แตกต่างจากปริมาณสเกลาร์ ตัวอย่างเช่น เวกเตอร์ **A** ดังรูป 1-1 เป็นต้น ขณะทำโจทย์แบบฝึกหัด การใช้อักษรตัวหนาไม่สามารถเขียนได้ด้วยปากกา จึงให้เขียนลูกศรกำกับไว้บนตัวพิมพ์ใหญ่ เพื่อบอกว่าเป็นปริมาณเวกเตอร์ ตัวอย่างเช่น $\vec{A}$



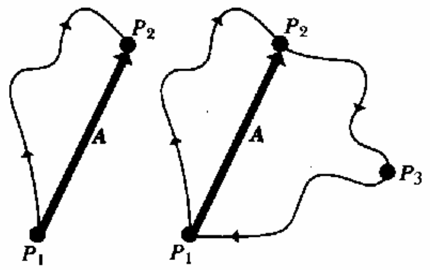
รูป 1-2 เวกเตอร์ **B** แทนระยะกระจัดจาก P_3 ไป P_4 เวกเตอร์ **C** มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ **B** แต่มีทิศตรงข้ามกัน

เวกเตอร์ **B** แทนระยะกระจัดจากจุด P_3 ไปยังจุด P_4 ดังรูป 1-2 มีขนาดและทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ **A** ซึ่งแทนระยะกระจัดจากจุด P_1 ไปยังจุด P_2 เราสามารถนิยามว่า เวกเตอร์ **A** = เวกเตอร์ **B** ถึงแม้ว่าจุดเริ่มต้นจะไม่ใช่จุดเดียวกัน แต่ถ้ามีทิศและขนาดเดียวกัน เวกเตอร์ทั้งสองเท่ากัน



รูป 1-3 เวกเตอร์ **A** และ **-A** มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศตรงกันข้าม

รูป 1-3 เวกเตอร์ **A** และ **-A** มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศตรงกันข้าม ถ้านำเวกเตอร์ **A** บวกกับเวกเตอร์ **-A** จะได้เป็นศูนย์ เขียนเป็นสมการได้ว่า **A** + (**-A**) = 0 จาก รูป 1-2 ความสัมพันธ์ระหว่าง **B** และ **C** อาจเขียนได้เป็น **B** = **-C** หรือ **C** = **- B** ก็ได้



รูป 1-4 ระยะกระจัดคือ เส้นตรงที่ลากจากจุดเริ่มต้นถึงจุดสิ้นสุด

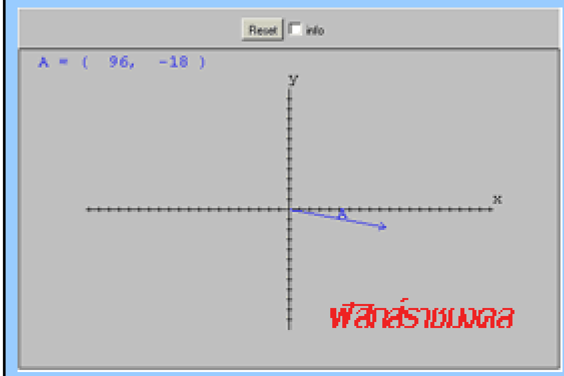
ระยะกระจัด คือ เส้นตรงที่ลากจากจุดเริ่มต้นจนถึงจุดสิ้นสุด การดูแต่ขนาดไม่สนใจทิศทาง ให้ใส่สัญลักษณ์ขีดสองขีดคร่อมเวกเตอร์

$$\text{ขนาดของเวกเตอร์ } A = |\mathbf{A}| \qquad \text{..................} \ (1\text{-}1)$$

ขนาดของเวกเตอร์ เป็นปริมาณสเกลาร์ มีค่าเป็นบวกเสมอ

1-2 การรวมเวกเตอร์

การทดลองเสมือนจริง

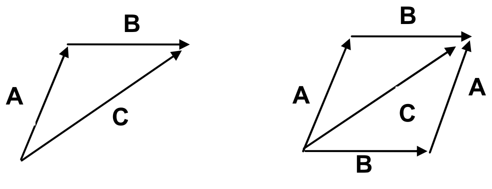


ทดลองบวกเวกเตอร์สองเวกเตอร์ว่าเป็นไปตาม กฎบวกเวกเตอร์หรือไม่

C = A + B = B + A คลิกครับ

สมมติให้อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ได้ระยะกระจัด **A** และยังเคลื่อนที่ต่อไปเป็นระยะกระจัด **B** ตามรูป 1-5 (a) ระยะกระจัดทั้งหมดจะเริ่มจากจุดตั้งต้นไปสิ้นสุดที่จุดปลาย แทนด้วยระยะกระจัด **C** เรียกระยะกระจัด **C** ว่าเป็นผลบวกของ **A** และ **B** ความสัมพันธ์นี้สามารถแสดงอยู่ในรูปของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad \text{.................. (1-2)}$$



(a) (b)

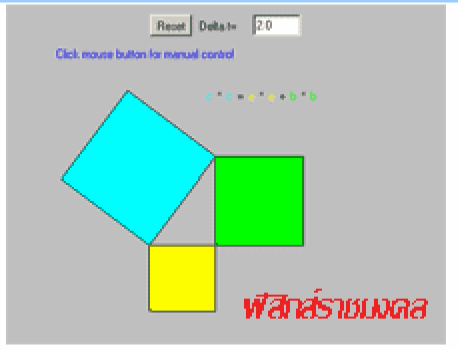
รูป 1-5 (a) เวกเตอร์ **C** คือผลบวกของเวกเตอร์ **A** และ เวกเตอร์ **B**

(b) การบวกเวกเตอร์ จะใช้เวกเตอร์ตัวไหนบวกก่อนหรือหลังก็ได้

สังเกตว่า ผลลัพธ์ของ **A** บวกกับ **B** หรือจะนำ **B** หรือ **A** เป็นเวกเตอร์อันแรก จะได้เวกเตอร์ลัพธ์ **C** เหมือนกัน นั่นคือ

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad \text{.................. (1-3)}$$

การทดลองเสมือนจริง



นักศึกษาลองศึกษาทฤษฎีพิธากอรัส และอธิบายว่าทำไม $c^2 = a^2 + b^2$ คลิกครับ

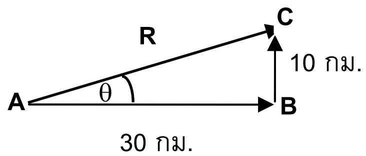
ตัวอย่าง 1-1 ถ้าคุณออกเดินไปทางทิศตะวันออก 30 กิโลเมตร แทนด้วยเวกเตอร์ **AB** และเดินต่อไปทางทิศเหนืออีก 10 กิโลเมตร แทนด้วยเวกเตอร์ **BC** ตามรูประยะกระจัดทั้งหมดแทนด้วยเวกเตอร์ **R** ซึ่งเป็นผลรวมของ **AB** และ **BC** ถึงกระนั้นก็ตาม การรวมเวกเตอร์ไม่ใช่นำเอา 30 กม. + 10 กม. = 40 กม. โดยตรง ต้องรวมกันแบบเวกเตอร์ จากรูปการเดินทางเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสามารถใช้ทฤษฎีพิธากอรัสหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ **R**

ทฤษฎีพิธากอรัสสำหรับสามเหลี่ยมมุมฉาก

(ด้านตรงข้ามมุมฉาก)^2 = (ด้านประกอบมุมฉาก)^2 + (ด้านประกอบมุมฉากที่เหลือ)^2

ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ **R** $= \sqrt{(10\text{กม.})^2 + (30\text{กม.})^2}$

$= \sqrt{1000\text{กม.}^2} = 31.6$ กม.



รูป 1-6 **R = AB + BC**

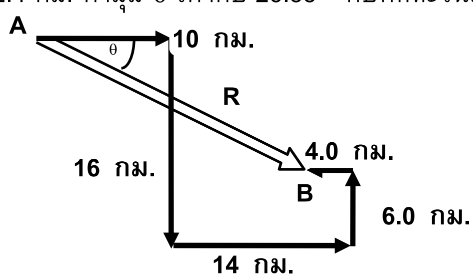
เวกเตอร์จะต้องมีขนาดและทิศทาง การบอกแต่ขนาดอย่างเดียวไม่เพียงพอ วิธีง่ายที่สุดให้ใช้ไม้โปรแทรกเตอร์วัดมุมโดยตรงจากรูปภาพ มีข้อกำหนดว่า รูปที่เขียนต้องใช้มาตราส่วนให้ถูกต้อง

จากการวัดมุม $\theta = 18.4^\circ$ นั่นคือ เวกเตอร์ลัพธ์มีขนาดเท่ากับ 31.6 กม. ทำมุม 18.4° กับทิศตะวันออกเฉียงไปทางเหนือ

1-3 การรวมหลายเวกเตอร์โดยใช้แผนภาพ

เราสามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์ซึ่งเกิดจากการรวมหลาย ๆ เวกเตอร์ ด้วยวิธีการเขียนแผนภาพ โดยการกำหนดมาตราส่วนและทิศทางของเวกเตอร์ให้ถูกต้องถ้าเป็นการรวม 2 เวกเตอร์ก็ให้ หางของเวกเตอร์ตัวที่สองต่อกับหัวของเวกเตอร์ตัวแรก เวกเตอร์ผลลัพธ์จะเริ่มวัดจากจุดตั้งต้น หรือหางของเวกเตอร์ตัวแรกไปสิ้นสุดที่หัวของเวกเตอร์ตัวที่สอง

การรวมเวกเตอร์โดยใช้แผนภาพสามารถรวมเวกเตอร์ได้มากกว่า 2 ยกตัวอย่าง ถ้าเราต้องการบวกเวกเตอร์ 10 กม.ตะวันออก, 16 กม.ใต้, 14 กม.ตะวันออก, 6 กม.เหนือ และ 4 กม.ตะวันตก เริ่มต้นให้แทนขนาดของเวกเตอร์ด้วยมาตราส่วนและทิศที่ถูกต้องเสียก่อน เช่น 1 ซม. แทน 10 กม. ต่อเวกเตอร์ไปตามลำดับดังรูป 1-7 เวกเตอร์ลัพธ์ **R** จะลากเป็นเส้นตรงจากจุดตั้งต้นไปสิ้นสุดที่หัวของเวกเตอร์ตัวสุดท้าย วัดขนาดด้วยไม้โปรแทรกเตอร์เท่ากับ 2.24 ซม. คำนวณกลับไปหาขนาดจริง จะได้ **R** มีขนาดเท่ากับ 22.4 กม. ทำมุม θ เท่ากับ 26.55° กับทิศตะวันออกเฉียงไปทางใต้



รูป 1-7 การรวมเวกเตอร์โดยใช้แผนภาพของเวกเตอร์ทั้ง 5

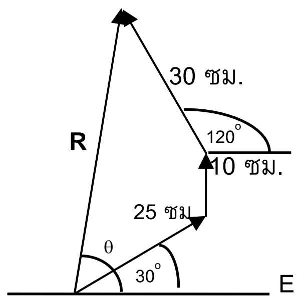
ตัวอย่าง 1-2 หาเวกเตอร์ลัพธ์โดยวิธีแผนภาพ

ระยะกระจัด (ซม.)	25	10	30
มุม (องศา)	30	90	120

ตาราง 1-1 มุมของเวกเตอร์ลัพธ์ให้วัดสัมพัทธ์กับทิศตะวันออก หรือแกน x

หลักการคำนวณ

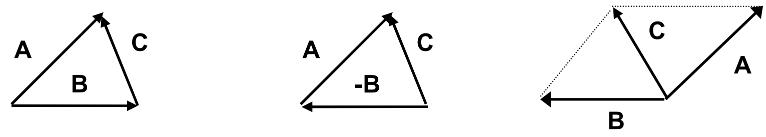
เขียนแผนภาพเวกเตอร์ตามรูป 1-8 วัดขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ **R** ได้ = 49 ซม. และ $\theta = 82^{\circ}$



รูป 1-8

1-4 การลบเวกเตอร์

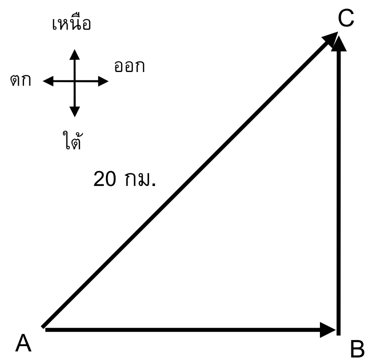
การลบเวกเตอร์ก็สามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์ได้เช่นเดียวกับการบวกเวกเตอร์ กล่าวคือ ให้กลับทิศทางของเวกเตอร์โดยใส่เครื่องหมายลบจะได้เวกเตอร์ตัวใหม่ จากนั้นหาเวกเตอร์ลัพธ์ของผลรวมระหว่างเวกเตอร์ตัวแรกกับเวกเตอร์ตัวใหม่นี้



C = A-B (a) **C = A+(-B)** (b) **C = A - B** (c)

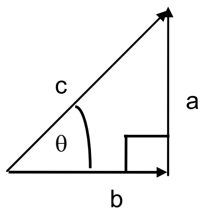
รูป 1-9 การลบเวกเตอร์

1-5 ส่วนประกอบของเวกเตอร์



รูป 1-10 ระยะกระจัดลัพธ์ 20 กม. ตะวันออกเฉียงเหนือมาจากการรวมเวกเตอร์ **AB** ตะวันออกกับเวกเตอร์ **BC** เหนือ ทั้ง **AB** และ **BC** เป็นส่วนประกอบย่อยของเวกเตอร์ลัพธ์ **AC**

ถ้าคุณออกเดินทางจากจุด A ไปยังจุด C ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือของ A เริ่มจาก A และไปสิ้นสุดที่ C (ดังรูป 1-10) กระนั้นคุณสามารถไปอีกทางคือ จาก A ไปที่ B ก่อน และจาก B จึงไปที่ C ระยะกระจัดจะเท่ากับจาก A ไป C โดยตรง ดังนั้น เวกเตอร์ **AC** สามารถแทนด้วยเวกเตอร์ **AB** บวกกับเวกเตอร์ **BC** ได้ เราจึงเรียกเวกเตอร์ทั้งสองนี้ว่า ส่วนประกอบของเวกเตอร์ **AC**



รูป 1-11 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ทบทวนฟังก์ชันตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉาก จากรูป 1-11

$\sin\theta = a/c$, $\cos\theta = b/c$, $\tan\theta = a/b$ .... (1-4)

ถ้าเราทราบมุม θ และความยาวด้านใดด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมมุมฉากก็สามารถหาด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมได้

จากรูป 1-11 ให้มุม $\theta = 30^{\circ}$ และ c = 30 ซม. จากสมการ 1-4 จะได้

$$a = c \sin\theta = (30 \text{ ซม.})(\sin 30^{\circ})$$

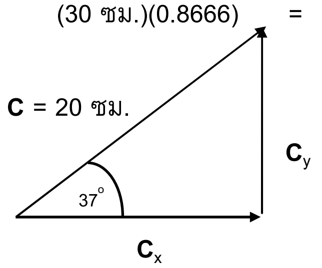
เปิดตารางภาคผนวกหรือกดเครื่องคิดเลข $\sin 30^{\circ} = 0.500$ ดังนั้น

$$a = (30 \text{ ซม.})(0.500) = 15.0 \text{ ซม.}$$

จากสมการ 1-4 จะได้

$$b = c \cos\theta = (30 \text{ ซม.})(\cos 30^{\circ})$$

$$= (30 \text{ ซม.})(0.8666) = 26.0 \text{ ซม.}$$

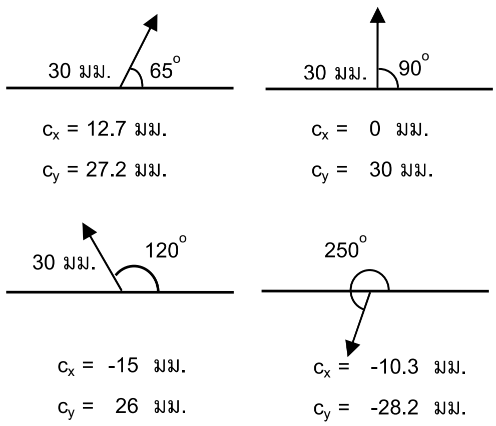


รูป 1-12 เวกเตอร์ **C** ขนาด 20 ซม. ทำมุม 37 ° กับแกน x

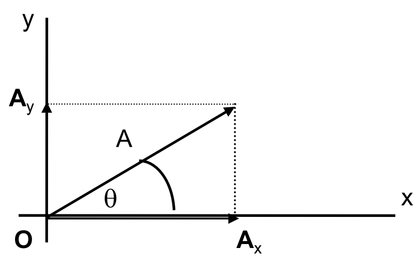
เวกเตอร์ **C** เป็นผลรวมของส่วนประกอบทางแกน x แทนด้วย $\mathbf{C}_x$ และส่วนประกอบทางแกน y แทนด้วย $\mathbf{C}_y$ เราคำนวณหาโดยใช้สมการ 1-4 ว่า

$$C_x = C \cos 37^{\circ} = (20 \text{ ซม.})(0.80) = 16 \text{ ซม.}$$

$$C_y = C \sin 37^{\circ} = (20 \text{ ซม.})(0.60) = 12 \text{ ซม.}$$



รูป 1-13 เวกเตอร์ เวกเตอร์ **C** ทำมุม θ กับแกน x ในลักษณะต่าง ๆ



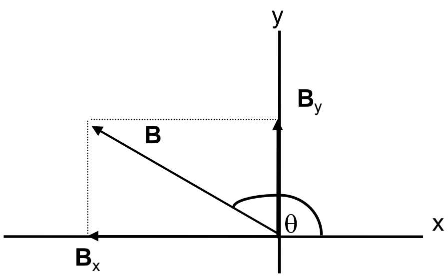
รูป 1-14 เวกเตอร์ $\mathbf{A}_x$ และ $\mathbf{A}_y$ คือส่วนประกอบทางแกน x และ y ของเวกเตอร์ **A**

รูป 1-14 เวกเตอร์ **A** แทนด้วยส่วนประกอบของเวกเตอร์ทางแกน x และ y เวกเตอร์ทั้งสองคือ A_x และ A_y ตามลำดับ เขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$

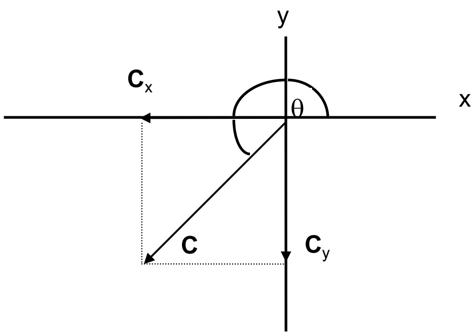
เราสามารถหาส่วนประกอบของเวกเตอร์ **A** จากฟังก์ชันทางตรีโกณ

$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \quad \text{และ} \quad \frac{A_y}{A} = \sin\theta$$

$$A_x = A\cos\theta \quad \text{และ} \quad A_y = A\sin\theta \qquad \text{.................. (1-5)}$$



(a)



(b)

รูป 1-15 (a) เวกเตอร์ **B** มีส่วนประกอบทางแกน x เป็นลบ เพราะอยู่ทางด้านซ้ายนับจากจุดเริ่มต้นไปทางแกน x ส่วนประกอบทางแกน y เป็นบวก

(b) เวกเตอร์ **C** มีส่วนประกอบทางแกน x และ y เป็นลบ

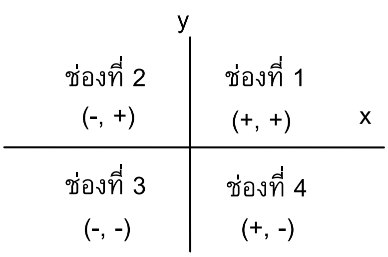
จากสมการ 1-5 ช่วยในการหาส่วนประกอบของเวกเตอร์บนแกน x และ y ในทางกลับกันถ้าทราบแต่ A_x และ A_y ก็สามารถคำนวณกลับไปหา A ได้ โดยการใช้ทฤษฎีของพิธากอรัส

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \text{.................. (1-6)}$$

มุมหาได้จาก

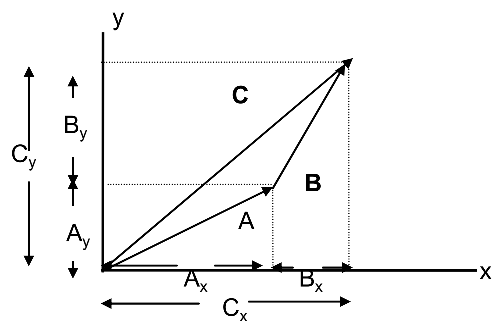
$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{และ } \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \qquad \text{.................. (1-7)}$$

มุม θ จากสมการ 1-7 มีปัญหาอยู่เหมือนกัน สมมติว่า A_x = 2 ม. และ A_y = -2 ม. จะได้ tan θ = -1 มีมุมที่เป็นไปได้อยู่ 2 มุม คือ 135° และ 315° (-45°) แต่คำตอบจะมีได้เพียงมุมเดียวเท่านั้น ให้ดูว่าค่าของ A_x เป็นบวก และ A_y เป็นลบ มุม θ ตกอยู่ที่พิกัดมุมฉาก xy ช่องที่ 4 (รูป 1-16) ดังนั้น มุมที่ถูกต้องก็คือ 315° (-45°), -45° มีความหมายว่าวัดตามเข็มนาฬิกาจาก +x ไป 45 องศา ปกติค่ามุมที่เป็นบวกจะวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน +x แต่ถ้าวัดตามเข็มนาฬิกาจะต้องใส่เครื่องหมายลบ



รูป 1-16 พิกัดมุมฉาก xy มีด้วยกัน 4 ช่อง แต่ละช่องค่า x และ y จะมีค่าเป็นบวกและลบแตกต่างกัน ยกตัวอย่างช่องที่ 4 ค่า x เป็นบวก ส่วนค่า y เป็นลบ

แต่ถ้า A_x = -2 ม. และ A_y = 2 ม. มุม θ ตกอยู่ที่พิกัดมุมฉาก xy ช่องที่ 2 มุมที่ถูกต้องก็คือ 135° เพราะค่า x เป็นลบ และค่า y เป็นบวก ดังนั้น คุณจะต้องใช้วิธีตรวจสอบพิกัดฉากว่าค่าของมุมตกอยู่ที่ช่วงใด ในกรณีที่คำตอบมี 2 ค่า



รูป 1-17 C_x และ C_y คือส่วนประกอบบนแกน x และแกน y ของเวกเตอร์ **C**

จากรูป 1-17 C_x และ C_y สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของเวกเตอร์ **A** และ **B** บนแกน x และ y ได้ดังนี้

$$C_x = A_x + B_x$$

$$C_y = A_y + B_y \qquad \text{.................. (1-8)}$$

ขนาดและมุมของ **C** หาได้จากสมการ (1-6) และ (1-7)

การบวกเวกเตอร์เพียง 2 อันค่อนข้างง่าย แต่ก็เป็นหลักการสำหรับการบวกเวกเตอร์หลาย ๆ อัน

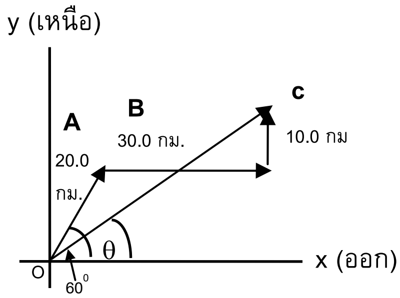
ให้ R เป็นผลบวกของ **A, B, C, D, E, ...,** เมื่อ

$$R_x = A_x + B_x + C_x + D_x + E_x + ...$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y + D_y + E_y + ... \qquad \text{.................. (1-9)}$$

ตัวอย่าง 1-3 เครื่องบินบินไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ทำมุม 60° เป็นระยะทาง 20 กม. และบินไปทางทิศตะวันออกอีก 30 กม. ต่อจากนั้นขึ้นเหนือไปอีก 10 กม. เครื่องบินลำนี้อยู่ไกลจากจุดตั้งต้นเท่าใด

หลักการคำนวณ



รูป 1-18

ให้แกน x เป็นทิศตะวันออก และแกน y เป็นทิศเหนือ

A คือ ระยะกระจัดสำหรับการบินเที่ยวแรก

B คือ ระยะกระจัดเที่ยวสอง

C คือ ระยะกระจัดเที่ยวสาม

และ **R** คือเวกเตอร์ลัพธ์ จากแผนภาพวัดค่า R ได้ 50 กม. ทำมุม 30° กับทิศตะวันออก เราสามารถตรวจสอบค่านี้ได้จากการคำนวณ

ส่วนประกอบแกน x และ y ของ **A** คือ

$$A_y = (20.0 \text{ กม.})(\cos 60^\circ)$$

$$= 10 \text{ กม.}$$

$A_y \quad = \quad (20.0 \text{ กม.})(\sin 60^\circ)$

$\quad\;\; = \quad 17.3 \text{ กม.}$

ส่วนประกอบของ x และ y ของระยะกระจัดต่างๆ สามารถแยกเป็นระบบได้ตามตาราง 1-2

ระยะกระจัด	มุม	ส่วนประกอบแกน x	ส่วนประกอบแกน y
A = 20.0 กม.	60°	10.0 กม.	17.3 กม.
B = 30.0 กม.	0°	30.0 กม.	0
C = 10.0 กม.	90°	0	10.0 กม.
		R_x = 40.0 กม.	R_y = 27.3 กม.

$$R = \sqrt{(40.0\text{km})^2 + (27.3\text{ km})^2}$$

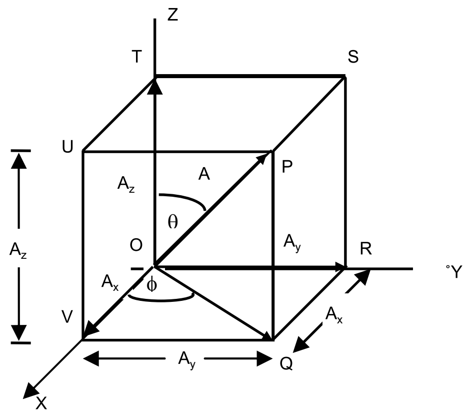
$$= 48.4 \text{ km}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{27.3}{40.0} \text{ km}$$

$$= 34.3^\circ$$

ข้อสังเกต ค่าที่คำนวณได้ละเอียดกว่าที่วัดได้จากแผนภาพ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับความละเอียดของมาตราส่วนและไม้บรรทัดที่ใช้วัด

ที่เขียนมาเวกเตอร์วางอยู่บนระนาบ xy เท่านั้น แต่เวกเตอร์ในทางปฏิบัติมีทิศได้ทุกทิศทุกทาง นั่นก็คือต้องมีทั้งด้านกว้าง ยาว และสูง แทนด้วย x, y และ z ส่วนประกอบของเวกเตอร์บนแกนทั้งสามสามารถเขียนได้ดังนี้ $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ และ $\mathbf{A}_z$ ตามลำดับ



รูป 1-19 $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ และ $\mathbf{A}_z$ เป็นเวกเตอร์ย่อยของ **A** ตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ

ดังนั้น $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$

ถ้า **A** ทำมุม θ กับแกน z

OQ เป็นเวกเตอร์ที่ได้จากการฉาย A ลงบนระนาบ xy ทำมุม ϕ กับแกน x

ดังนั้น $A_x = A \sin\theta \cos\phi$

$A_y = A \sin\theta \sin\phi$

$A_z = A \cos\theta$

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$

โดยที่ $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ .... (1-10)

1-6 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือเวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย มีจุดประสงค์เพื่อบอกทิศทาง ในระบบพิกัดฉาก xy

นิยามให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย **i** ชี้ตำแหน่งไปทางบวกของแกน x และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย **j** ชี้ไปทางบวกของแกน y

ส่วนประกอบบนแกน x และ y ของ **A** สามารถเขียนอยู่ในรูปของ **i, j** ได้ดังนี้

$\mathbf{A}_x = A_x\mathbf{i}$, $\mathbf{A}_y = A_y\mathbf{j}$ .... (1-11)

เช่นเดียวกัน เราสามารถเขียนเวกเตอร์ **A** ในระบบพิกัดฉาก xy ในรูปของส่วนประกอบและมีตัวชี้ทิศทางดังนี้

$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$ .... (1-12)

$A_x\mathbf{i}$ เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์บนแกน x มี **i** เป็นตัวชี้บอกทิศทาง และ A_x เป็นตัวบอกขนาด

$A_y\mathbf{j}$ เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์บนแกน y มี **j** เป็นตัวชี้บอกทิศทาง และ A_y เป็นตัวบอกขนาด

เมื่อเวกเตอร์ **A** และ **B** แสดงอยู่ในรูปของเวกเตอร์ประกอบบนพิกัด xy เราสามารถจะรวมเวกเตอร์ทั้งสอง โดยใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยกำกับบนแกนแต่ละแกน ดังนี้

$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \\
&= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}) + (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}) \\
&= (A_x + B_x)\,\mathbf{i} + (A_y + B_y)\,\mathbf{j} \\
&= C_x\mathbf{i} + C_y\,\mathbf{j} \qquad \text{.................. (1-13)}
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าเวกเตอร์ **C** ก็สามารถแสดงอยู่ในรูปของเวกเตอร์ประกอบบนพิกัดฉาก xy เช่นเดียวกับ **A** และ **B** ดังรูป 1-17

สำหรับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ คือมีแกน x, y และ z เราจะนิยามเวกเตอร์หนึ่งหน่วย **k** ชี้ไปทางบวกของแกน z เพิ่มขึ้นมา ดังนั้น รูปทั่วไปของเวกเตอร์ **A, B** และ **C** สามารถเขียนอยู่ในระบบสามมิติได้ดังนี้

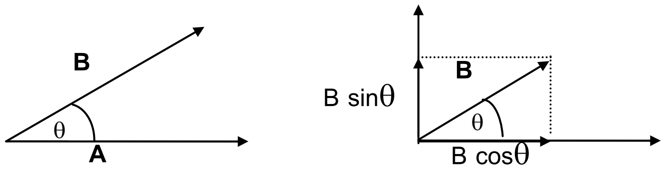
$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{A} &= A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \\
\mathbf{B} &= B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}
\end{aligned}\right\} \quad \text{.... .... (1-14)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\,\mathbf{j} + (A_z + B_z)\,\mathbf{k} \\
&= C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} + C_z\,\mathbf{k} \qquad \text{.................. (1-15)}
\end{aligned}$$

1-7 ผลคูณของเวกเตอร์

เวกเตอร์ไม่ใช่เลขจำนวน เพราะประกอบด้วยขนาดและทิศทาง การคูณกันแบบเลขจำนวนไม่สามารถนำมาใช้กับเวกเตอร์ได้ อันที่จริงเราก็ได้พิสูจน์แล้วว่า การบวกลบเวกเตอร์ก็ไม่เหมือนกับการบวกลบเลขจำนวนธรรมดา การคูณเวกเตอร์มีด้วยกัน 2 แบบ แบบแรกได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ ขณะที่แบบที่สองได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์

การคูณแบบที่หนึ่ง ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์



รูป 1-20 (a) เวกเตอร์ **A** และ **B** มีจุดตั้งต้นเดียวกันคูณด้วยวิธีการดอตกัน

(b) B cos θ เป็นส่วนประกอบของ **B** ในทิศของ **A** และ **A·B** ก็คือผลการคูณขนาดของ **B** บนแกน **A** กับ **A** นั่นเอง

เวกเตอร์ **A** และ **B** มีจุดตั้งต้นเดียวกัน มุมระหว่างเวกเตอร์เท่ากับ θ แสดงดังรูป 1-20 (a) เรานิยามผลของเวกเตอร์ **A** คูณ **B** ดังนี้

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta \qquad \text{.................. (1-16)}$$

ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ มีแต่ขนาดเท่านั้น การคูณแบบแรกนี้มีชื่อเฉพาะเรียกว่า **<u>การดอตเวกเตอร์</u>** ผลอาจจะเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับมุม θ ถ้า θ อยู่ระหว่าง 0 ถึง 90 $^\circ$ ผลการดอตจะมีค่าเป็นบวก แต่ถ้า θ อยู่ระหว่าง 90° ถึง 180° ผลจะได้เป็นลบ แต่ที่มุม θ = 90° **A·B** = 0 เราสามารถสรุปได้ว่า ผลการดอตของเวกเตอร์ทั้งสองมีค่าเป็นศูนย์เสมอ ถ้าเวกเตอร์ทั้งสองตั้งฉากกัน

การดอตเวกเตอร์ไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงลำดับก่อนหลัง ดังนี้

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

จากสมการ (1-16) การดอตเวกเตอร์ คือการคูณขนาดของ $|\mathbf{A}|$ และ $|\mathbf{B}|$ cos θ จากรูป 1-20 (b) B cos θ คือส่วนประกอบของเวกเตอร์ **B** บนแกน **A** ดังนั้น <u>เราสรุปได้ว่า</u> **A** ดอต **B** คือ ผลคูณของ $|\mathbf{B}|$ กับ $|\mathbf{A}|$ บนแกนของ **A** นั่นเอง

เพื่อให้เห็นการดอตชัดเจน ก็ควรจะแยกองค์ประกอบเวกเตอร์ให้อยู่ในระบบพิกัด 3 มิติ โดยมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยกำกับทิศทาง

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \qquad \text{.................. (1-17)}$$

การดอตระหว่างวงเล็บใช้วิธีการคูณแบบธรรมดา วงเล็บแรกมี 3 เทอม วงเล็บหลังมี 3 เทอม ดอตกันจะได้ 9 เทอม ดังนี้

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\mathbf{i}\cdot B_x\mathbf{i} + A_x\mathbf{i}\cdot B_y\mathbf{j} + A_x\mathbf{i}\cdot B_z\mathbf{k} + A_y\mathbf{j}\cdot B_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}\cdot B_y\mathbf{j} + A_y\mathbf{j}\cdot B_z\mathbf{k} + A_z\mathbf{k}\cdot B_x\mathbf{i} + A_z\mathbf{k}\cdot B_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}\cdot B_z\mathbf{k}) \quad \text{.................. (1-18)}$$

แต่ละเทอมคือการดอตกันของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะสังเกตเห็นว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ดอตกันไม่ตั้งฉากก็ขนานกันอย่างใดอย่างหนึ่ง ยกตัวอย่าง $A_x\mathbf{i}\cdot B_x\mathbf{i}$ เวกเตอร์ทั้ง 2 ขนานกัน เพราะอยู่บนแกน x เหมือนกัน มุมระหว่างเวกเตอร์เป็นศูนย์ $\cos\theta$ มีค่าเป็นหนึ่ง ผลลัพธ์การดอตกันคือ A_xB_x เทอมถัดไป $A_x\mathbf{i}\cdot B_y\mathbf{j}$ เวกเตอร์ทั้ง 2 ตั้งฉากกัน เพราะ A_x อยู่บนแกน x และ B_y อยู่บนแกน y ค่า $\cos\theta$ มีค่าเป็นศูนย์ ผลลัพธ์การดอตเป็นศูนย์ สมการ (1-18) มี 6 ใน 9 เทอมที่ผลการดอตเป็นศูนย์ มี 3 เทอมเท่านั้นที่ไม่เป็นศูนย์ ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad \text{.................. (1-19)}$$

ตัวอย่าง 1-4 จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ทั้ง 2 ดังนี้

$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

หลักการคำนวณ

จากสมการ (1-14) เรามี

$$A_x = 2 \qquad B_x = 1$$
$$A_y = 3 \qquad B_y = -2$$
$$A_z = 4 \qquad B_z = 3$$

จากสมการ (1-16) และ (1-19) จะได้

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{|A||B|} \quad \text{.................. (1-20)}$$

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = (2)(1) + (3)(-2) + (4)(3) = 8$$
$$|\mathbf{A}| = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29}$$
$$|\mathbf{B}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14}$$
$$\cos\theta = \frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{14}} = 0.397$$

จะได้ $\theta = 66.6^\circ$

การดอตเวกเตอร์มีความสำคัญมากในบทที่จะศึกษาต่อไป โดยเฉพาะกับเรื่องของงานและพลังงาน เมื่อแรงคงที่ **F** กระทำต่อวัตถุ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไประยะทาง d นิยามของงานจะเป็นดังนี้

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$$

การคูณแบบที่สองผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์

เวกเตอร์ **A** และ **B** มีจุดตั้งต้นเดียวกัน ดังรูป 1-20 มุมระหว่างเวกเตอร์เท่ากับ θ เวกเตอร์ทั้งสองตั้งอยู่บนระนาบเดียวกัน ผลลัพธ์การคูณของเวกเตอร์ทั้งสองจะตั้งฉากกับระนาบนี้ และขนาดจะมีค่าเท่ากับ AB sin θ เนื่องจากผลที่ออกมาเป็นเวกเตอร์ การคูณแบบนี้มีชื่อเฉพาะเรียกว่า **การครอสเวกเตอร์**

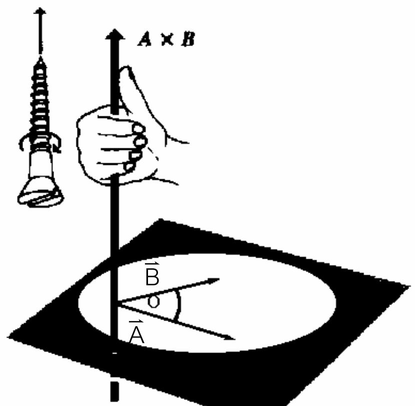
ให้ **C** เป็นผลลัพธ์ของการครอสเวกเตอร์

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

ขนาดของ **C** หาได้จาก

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin\theta \qquad \text{.................. (1-21)}$$

ถ้า θ ทำมุม 0 หรือ 180° คือเวกเตอร์ทั้งสองขนานหรือตรงกันข้ามกัน ผลของการครอสจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น สามารถ**สรุปได้ว่า**เวกเตอร์ทิศเดียวกันครอสกันเป็นศูนย์เสมอ



รูป 1-21 เวกเตอร์ **A** และ **B** ตั้งอยู่บนระนาบเดียวกัน ผลลัพธ์ของเวกเตอร์ **A×B** จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบนี้ ทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์อธิบายด้วยกฎมือขวา

ทิศทางการครอสเวกเตอร์ได้จากกฎของมือขวา จากรูป 1-21 ให้กำมือขวาหัวนิ้วโป้งชี้ขึ้นตั้งฉากกับระนาบการครอส หมุนมือขวาทวนเข็มนาฬิกา จาก **A** ไปยัง **B** หรือจะใช้สกรู ก็ให้หัวสกรูวางลงบนระนาบการครอสและหมุนจาก **A** ไปยัง **B** เราจะได้ทิศทางตามหัวนิ้วโป้ง หรือสกรู ซึ่งเป็นผลจากการครอสเวกเตอร์ **A×B**

ใช้วิธีเดียวกันถ้าเราจะหาผลการครอสเวกเตอร์ **B×A** ให้กำมือขวาหัวนิ้วโป้งชี้ลงตั้งฉากกับระนาบการครอส หมุนมือขวาตามเข็มจาก **B** ไป **A** หรือจะใช้สกรู ให้หัวสกรูวางลงบนระนาบการครอสและหมุนจาก **B** ไป **A** ตอนนี้จะเห็นว่าทิศทางจะตรงกันข้ามกับตอนแรก ถ้า **A×B** มีทิศขึ้น **B×A** ก็จะมีทิศลง ดังนั้น การครอสกันต้องคำนึงถึงลำดับการครอสด้วย ภาษาอังกฤษเรียกการคูณโดยไม่ต้องคำนึงถึงลำดับก่อนหลังว่า กฎการสลับที่ (**Commutative**) การบวกลบและดอตเวกเตอร์มีคุณสมบัติ commutative ยกเว้นการครอสเวกเตอร์ **A** และ **B**

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A} \qquad \text{.................. (1-22)}$$

เพื่อให้การครอสชัดเจน ก็ควรจะแยกองค์ประกอบเวกเตอร์ให้อยู่ในระบบพิกัด 3 มิติ โดยมีเวกเตอร์ 1 หน่วยกำกับทิศทาง

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} \quad = \quad (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$$

การครอสระหว่างวงเล็บใช้วิธีการคูณข้ามวงเล็บ วงเล็บแรกมี 3 เทอม วงเล็บหลังมี 3 เทอม ครอสกันจะได้ 9 เทอม ดังนี้

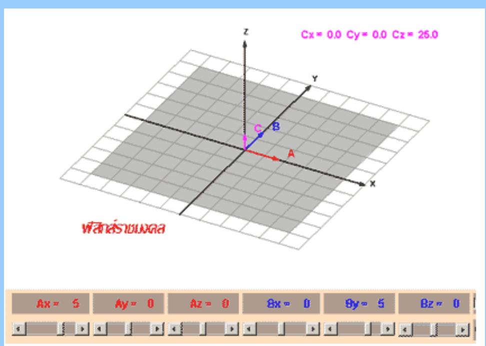
$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} \quad = \quad & (A_x\mathbf{i} \times B_x\mathbf{i} + A_x\mathbf{i} \times B_y\mathbf{j} + A_x\mathbf{i} \times B_z\mathbf{k} \\ & + A_y\mathbf{j} \times B_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} \times B_y\mathbf{j} + A_y\mathbf{j} \times B_z\mathbf{k} \\ & + A_z\mathbf{k} \times B_x\mathbf{i} + A_z\mathbf{k} \times B_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \times B_z\mathbf{k}) \quad \text{..................} \ (1\text{-}23)\end{aligned}$$

ถ้าให้ **C = A×B** ส่วนประกอบของเวกเตอร์ C บนระบบพิกัด x, y และ z คือ

$$\begin{aligned} C_x &= A_yB_z - A_zB_y \\ C_y &= A_zB_x - A_xB_z \\ C_z &= A_xB_y - A_yB_x \qquad \text{..................} \ (1\text{-}24)\end{aligned}$$

การครอสเวกเตอร์สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในบทต่อไป

การทดลองเสมือนจริง



ตัวอย่าง ในรูปภาพ เวกเตอร์ **A** = 5 **i** เวกเตอร์ **B** = 5 **j** **A** x **B** = 25 **k** ให้นักศึกษาทดลองครอสเวกเตอร์ในห้องทดลองเสมือนจริง โดยกำหนดให้ เวกเตอร์ **A** = 5 **i** - 2 **j** + **k** เวกเตอร์ **B** = - 3 **i** + **j** - 7 **k** จะได้คำตอบ **A** x **B** = 13 **i** + 32 **j** - **k**

คำถาม ให้นักศึกษาสร้างเวกเตอร์ **A** และ **B** ขึ้นมาด้วยตนเอง และทำการครอสในห้องทดลองเสมือนจริง วาดภาพที่ได้ พร้อมกับคำนวณประกอบ กดที่รูปภาพหรือที่นี่เพื่อเข้าสู่การทดลอง

ตัวอย่าง 1-5 เวกเตอร์ **A** มีขนาด 6 หน่วย ทิศ + x เวกเตอร์ **B** มีขนาด 4 หน่วย อยู่บนระนาบ xy ทำมุม 30° กับแกน + x และทำมุม 60° กับแกน +y จงหาผลลัพธ์ของ **A** × **B**

หลักการคำนวณ ขนาดของการครอสเวกเตอร์ คือ

$$|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin\theta \quad = \quad (6)(4)\sin 30^\circ \quad = \quad 12$$

จากกฎของมือขวา ผลลัพธ์ของ **A×B** จะอยู่ในทิศ+z

เราสามารถเขียนส่วนประกอบของ **A** และ **B** บนแกน x, y และ z โดยเทียบกับสมการ (1-24)

$A_x = 6$, $A_y = 0$, $A_z = 0$

$B_x = 4\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ $B_y = 4\cos 60^\circ = 2$, $B_z = 0$

ให้ $\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ **C** บนพิกัด x, y และ z คือ

$$C_x = (0)(0) - (0)(2) = 0$$

$$C_y = (0)(2\sqrt{3}) - (6)(0) = 0$$

$$C_z = (6)(2) - (0)((2\sqrt{3}) = 12$$

C = 12 **k**

เวกเตอร์ **C** จะมีทิศอยู่ในแกน +z ส่วนขนาดจะเท่ากับ $\sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = 12$ หน่วย

แบบฝึกหัดท้ายบทพร้อมเฉลย

แบบฝึกหัดท้ายบทพร้อมเฉลย คลิกครับ

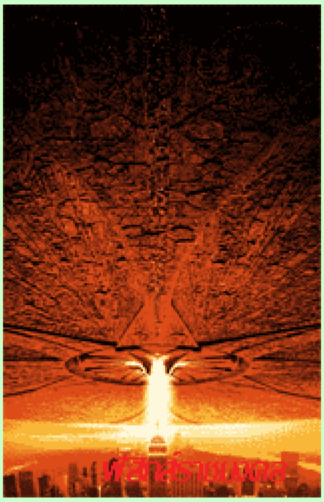
ทดสอบก่อนและหลังเรียน

วิธีทำ ให้ใส่ชื่อ สกุล เลือกวิชาที่สอบ และจำนวนข้อ แต่ต้องไม่เกินจากที่กำหนดไว้ เช่น กำหนดไว้ 10 ข้อ เวลาเลือกจำนวนข้อ ให้เลือก 5 และ 10 ข้อไม่เกินจากนี้ เป็นต้น เมื่อทำเสร็จสามารถดูคะแนนจากรายละเอียดผู้ทำข้อสอบได้ทันที

เรื่อง เวกเตอร์

คลิกเข้าสู่ ทดสอบก่อนและหลังเรียน

บรรยายลงในกระดาษฟิสิกส์ราชมงคล



ภาพยนตร์เรื่อง independent day มีฉากบางตอนสร้างขึ้นภายในคอมพิวเตอร์ ใช้วิธีที่เรียกว่า เวกเตอร์ Graphic ภาพทั้งหมดประกอบขึ้นด้วยหลักการทางเวกเตอร์ โดยการเชื่อมจุดขึ้นเป็นเส้น แต่ละเส้นมีขนาดและทิศทางแน่นอน ภาพหนึ่งภาพมีเส้นประกอบขึ้นเป็นจำนวนหมื่นๆเส้น ให้นักศึกษาบรรยายภาพนี้ หรือที่เกี่ยวข้องกับวิธีเหล่านี้ลงในกระดาษฟิสิกส์ราชมงคล

คลิกเข้าสู่กระดานฟิสิกส์ราชมงคลใหม่

แบบฝึกหัดเรื่องเวกเตอร์

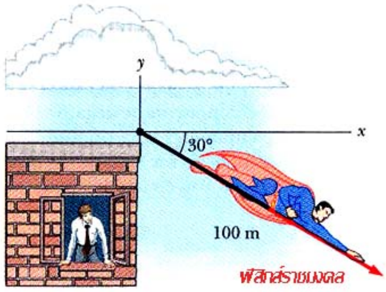
1. รถยนต์คันหนึ่งแล่นออกจากใจกลางเมืองไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทาง 80.0 km แล้วจึงเลี้ยวไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 192 k m น้ำมันหมดพอดี จงหาการกระจัดของรถยนต์จากใจกลางเมืองถึงจุดที่หยุด [ตอบ 208 km -67.4 องศา วัดเทียบกับทิศตะวันออกไปทางทิศใต้]

2. เต่าตัวเล็กๆ ตัวหนึ่งถูกนำมาวางไว้ที่จุดกำเนิดของตาราง xy ที่เขียนไว้บนแผ่นกระดาษใหญ่แผ่นหนึ่ง ช่องตารางแต่ละช่องมีขนาด 1.0 cm x 1.0 cm เต่าเดินไปครู่หนึ่ง แล้วในที่สุดก็หยุดที่จุด (24, 10) นั่นคือ ที่ 24 ช่องไปตามแกน x และ 10 ช่องไปตามแกน y จงหาการกระจัดของเต่าตัวนี้จากจุดกำเนิด [ตอบ 26 cm 23 องศา เหนือแกน +x]

3. จงหาองค์ประกอบสเกลาร์ตามแกน x และ แกน y ของการกระจัดต่อไปนี้ในระนาบ xy : ก) 300 cm ทำมุม 127 องศา และ ข) 500 cm ทำมุม 220 องศา [ตอบ ก) -180 cm , 240 cm : ข) -383 cm , -321 cm]

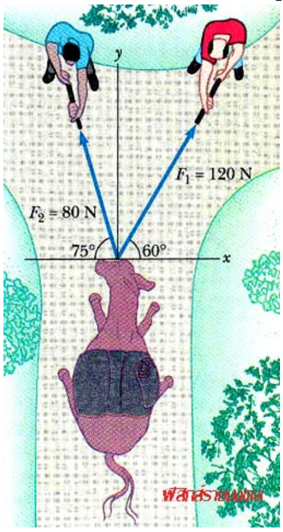
4. วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลม มีรัศมีความโค้ง 7 เมตร เมื่อเคลื่อนที่ครบรอบพอดี จงหาระยะทาง และการกระจัดที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ [ตอบ 44 เมตร , 0]

5. ซูเปอร์แมนเหาะจากดาดฟ้า ดังรูป จงหาองค์ประกอบของระยะกระจัดตามแนวแกนระดับ และดิ่ง



[ตอบ 86.6 m , -50.0 m]

6. มองจากด้านบนดังรูป ชายสองคนกำลังดึงควายดื้อตัวหนึ่ง จงคำนวณหา ก) แรงลัพธ์ ข) แรงฉุดของคนที่สาม ที่กระทำบนตัวควาย และทำให้แรงลัพธ์เป็นศูนย์



[ตอบ ก) 198.3 N ข) 198.3 N ทำมุม 246 องศา กับแกน +x]

7. เวกเตอร์ **A** ขนาด 4 หน่วยทำมุม θ กับแกน + X จงหา

ก. ขนาดขององค์ประกอบของเวกเตอร์นี้ตามแนวแกน X และ Y

ข. สมการเวกเตอร์ ของเวกเตอร์ **A** ในรูปแบบของสัญลักษณ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

[ตอบ ก) $A_x = 4 \cos \theta$, $A_y = 4 \sin \theta$ ข) $\mathbf{A} = 4 \cos \theta\, \mathbf{i} + 4 \sin \theta\, \mathbf{j}$]

8. เวกเตอร์สามปริมาณต่อกันดังรูป ความสัมพันธ์ทางเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้ผิด

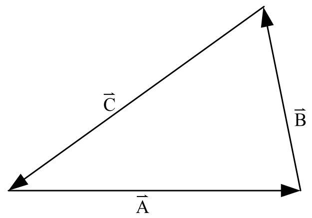
ก. **A** + **B** + **C** = 0

ข. –**C** = **A** + **B**

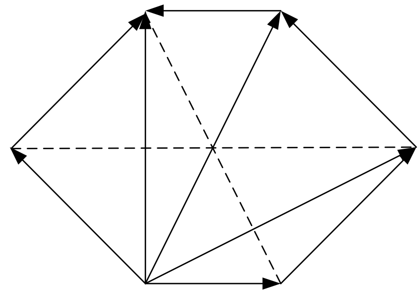
ค. **A** = -**B** - **C**

ง. **B** = **C** + **A**

[ตอบ ง.]



9. กำหนดให้ ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยม ดังรูป จงประกาศผลบวกของเวกเตอร์ต่อไปนี้ให้เหลือแค่เวกเตอร์เดียว



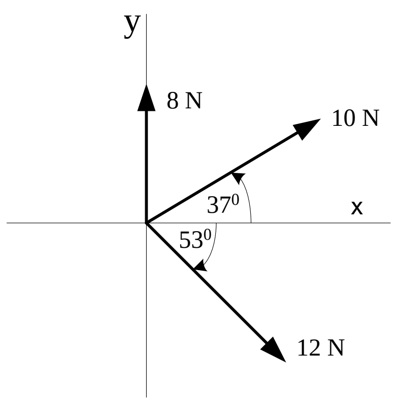
3.1 **AB** + **BC** + **CD** + **DE** (**AB**)

3.2 **AB** + **BC** + **AF** (**AD**)

3.3 **AB** + **AC** + **AE** +**AF** (2**AD**)

3.4 **AB** + **AD** + **AB** (2**AD**)

10. แรง 3 แรงกระทำต่อวัตถุหนึ่ง ณ จุดกำเนิดดังแสดงในรูป จงหาเวกเตอร์ผลรวมของเวกเตอร์ทั้ง 3 เวกเตอร์ เมื่อ N = นิวตัน



[ตอบ **F** = (15.2 **i** + 4.4 **j**) N]

11. กำหนดให้ **A** = 3**i**+ 4**j** และ **B** = -2 **i** - 2 **j** จงหา

ก. **A** + **B**

ข. **A** - **B**

ค. ขนาดและทิศทางของ **A** + **B**

ง. **A** • **B**

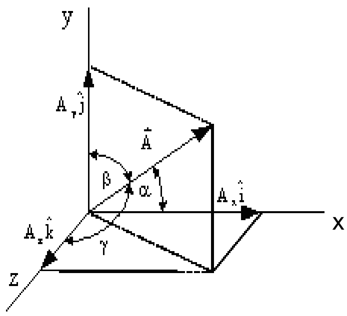
จ. **A** x **B**

[ตอบ ก) **i** + 2 **j** ข) 5 **i** + 6 **j**

ค) $\sqrt{5}$, 63.4^0 จากแกน + x ง) - 14

จ) 2 **k**]

12. จงหาค่าของมุมที่เวกเตอร์ **A** = 3 **i** + 5 **j** + 2**k** ทำกับแกน X,Y และ Z ตามลำดับ โดยอาศัยนิยามของผลคูณสเกลาร์ และมุมต่างที่กำหนดไว้ในรูป
[ตอบ $\alpha = 60.8^0$, $\beta = 35.8^0$, $\gamma = 71.1^0$]



กำหนดให้ (ใช้ตอบคำถามข้อ 13-17)

A = 2 **i** + 3 **j** + 4 **k**

B = **i** -10 **j** + 8 **k**

C = -5 **i** + 7 **j** - 9 **k**

D = 11 **i** + 3 **j** – 13**k**

จงหา

13. **A** + 2**C**

14. **B** – (3**A** x **C**)

15. **A** x **B**

16. | 2**A** + **D**|

17. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ **A**, **B**, **C**, **D**

18. จงแสดงว่าเวกเตอร์ **A** = 2 **i** – **j** + 2**k** และ เวกเตอร์ **B** = -2 **i** + 4 **j** + 4 **k** ตั้งฉากกัน

19. จงแสดงว่าเวกเตอร์ **A** = **i** - 3 **j** + 4 **k** และ เวกเตอร์ **B** = - 2 **i** + 6 **j** – 8 **k** ไม่ขนานกัน

20. จงแสดงให้เห็นว่าผลคูณแบบเวกเตอร์ **A** x **B** สามารถเขียนในรูปของดีเทอร์มิแนนต์ได้คือ

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

หนังสืออิเล็กทรอนิกส์	
ฟิสิกส์ 1(ภาคกลศาสตร์(	ฟิสิกส์ 1 (ความร้อน)
ฟิสิกส์ 2	กลศาสตร์เวกเตอร์
โลหะวิทยาฟิสิกส์	เอกสารคำสอนฟิสิกส์ 1
ฟิสิกส์ 2 (บรรยาย(	แก้ปัญหาฟิสิกส์ด้วยภาษา c
ฟิสิกส์พิศวง	สอนฟิสิกส์ผ่านทางอินเตอร์เน็ต
ทดสอบออนไลน์	วีดีโอการเรียนการสอน
หน้าแรกในอดีต	แผ่นใสการเรียนการสอน
เอกสารการสอน PDF	กิจกรรมการทดลองทางวิทยาศาสตร์
แบบฝึกหัดออนไลน์	สุดยอดสิ่งประดิษฐ์
การทดลองเสมือน	
บทความพิเศษ	ตารางธาตุ)ไทย1) 2 (Eng)
พจนานุกรมฟิสิกส์	ลับสมองกับปัญหาฟิสิกส์
ธรรมชาติมหัศจรรย์	สูตรพื้นฐานฟิสิกส์
การทดลองมหัศจรรย์	ดาราศาสตร์ราชมงคล
แบบฝึกหัดกลาง	
แบบฝึกหัดโลหะวิทยา	แบบทดสอบ
ความรู้รอบตัวทั่วไป	อะไรเอ่ย ?
ทดสอบ)เกมเศรษฐี(	คดีปริศนา
ข้อสอบเอนทรานซ์	เฉลยกลศาสตร์เวกเตอร์
คำศัพท์ประจำสัปดาห์	
ความรู้รอบตัว	
การประดิษฐ์แของโลก	ผู้ได้รับโนเบลสาขาฟิสิกส์
นักวิทยาศาสตร์เทศ	นักวิทยาศาสตร์ไทย
ดาราศาสตร์พิศวง	การทำงานของอุปกรณ์ทางฟิสิกส์
การทำงานของอุปกรณ์ต่าง ๆ	

การเรียนการสอนฟิสิกส์ 1 ผ่านทางอินเตอร์เน็ต	
1. การวัด	2. เวกเตอร์
3. การเคลื่อนที่แบบหนึ่งมิติ	4. การเคลื่อนที่บนระนาบ
5. กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน	6. การประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน
7. งานและพลังงาน	8. การดลและโมเมนตัม
9. การหมุน	10. สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง
11. การเคลื่อนที่แบบคาบ	12. ความยืดหยุ่น
13. กลศาสตร์ของไหล	14. ปริมาณความร้อน และ กลไกการถ่ายโอนความร้อน
15. กฎข้อที่หนึ่งและสองของเทอร์โมไดนามิก	16. คุณสมบัติเชิงโมเลกุลของสสาร
17. คลื่น	18.การสั่น และคลื่นเสียง
การเรียนการสอนฟิสิกส์ 2 ผ่านทางอินเตอร์เน็ต	
1. ไฟฟ้าสถิต	2. สนามไฟฟ้า
3. ความกว้างของสายฟ้า	4. ตัวเก็บประจุและการต่อตัวต้านทาน
5. ศักย์ไฟฟ้า	6. กระแสไฟฟ้า
7. สนามแม่เหล็ก	8.การเหนี่ยวนำ
9. ไฟฟ้ากระแสสลับ	10. ทรานซิสเตอร์
11. สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและเสาอากาศ	12. แสงและการมองเห็น
13. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ	14. กลศาสตร์ควอนตัม
15. โครงสร้างของอะตอม	16. นิวเคลียร์
การเรียนการสอนฟิสิกส์ทั่วไป ผ่านทางอินเตอร์เน็ต	
1. จลศาสตร์)kinematic)	2. จลพลศาสตร์ (kinetics)
3. งานและโมเมนตัม	4. ซิมเปิลฮาร์โมนิก คลื่น และเสียง
5. ของไหลกับความร้อน	6.ไฟฟ้าสถิตกับกระแสไฟฟ้า
7. แม่เหล็กไฟฟ้า	8. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับแสง
9. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ อะตอม และนิวเคลียร์	

ฟิสิกส์ราชมงคล